

Anneaux et polynômes - TD 1

1. Soient $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Posons
 $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) := (ac, bd)$ et $(a, b) \times (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$.
Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ sont des anneaux, qui ne sont pas isomorphes.
2. Soit $f : R \rightarrow R'$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que $\text{Ker } f$ est un idéal de R .
3. Soit $f : R \rightarrow R'$ un homomorphisme d'anneaux et soit J un idéal de R' . Montrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de R .
4. Soit R un anneau avec $0_R \neq 1_R$. L'anneau R est un corps si et seulement si R a exactement deux idéaux: $\{0_R\}$ et R .
5. Soit $f : R \rightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux. Si R est un corps, alors f est injectif.
6. Montrer que R est un anneau intègre si et seulement si $R[x]$ est un anneau intègre. Montrer que $R[x]$ n'est jamais un corps, et déterminer ses éléments inversibles.
7. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(m) \cap (n) = (\text{ppcm}(m, n))$ et $(m, n) = (\text{pgcd}(m, n))$ (utiliser le fait que $\text{pgcd}(m, n) = am + bn$ pour certains $a, b \in \mathbb{Z}$).
8. Soient $f(x), g(x) \in k[x]$, où k est un corps. Montrer que $(f(x)) \cap (g(x)) = (\text{ppcm}(f(x), g(x)))$ et $(f(x), g(x)) = (\text{pgcd}(f(x), g(x)))$.
9. Soit k un corps et soit $f(x) \in k[x]$ avec $f(x) \notin k$. L'idéal $(f(x))$ est maximal si et seulement si $(f(x))$ est premier, qui est vrai si et seulement si $f(x)$ est irréductible dans $k[x]$.
10. Soit $I := \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(1) = f(-1) = 0\}$. Montrer que I est un idéal de $\mathbb{Q}[x]$, et trouver $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tel que $I = (p(x))$. Dédurre que $\mathbb{Q}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps.
11. Soit k un corps et soit $f(x) \in k[x]$. Montrer que si $\deg f(x) \in \{2, 3\}$ et $f(x)$ n'a pas de racines dans k , alors $f(x)$ est irréductible dans $k[x]$.
12. Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Le polynôme $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$ si et seulement si $\deg f(x) = 1$ ou $\deg f(x) = 2$ et $f(x)$ n'a pas de racines réelles.
13. Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ avec $a_n \neq 0$. S'il existe un nombre premier p tel que
 - (i) p divise a_0, a_1, \dots, a_{n-1} ,
 - (ii) p ne divise pas a_n , et
 - (iii) p^2 ne divise pas a_0 ,alors $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$ ("critère de Eisenstein").
14. Si R est un anneau avec $\text{car } R = p$ où p est un nombre premier, alors
$$(a + b)^p = a^p + b^p \quad \text{et} \quad (a - b)^p = a^p - b^p$$
pour tous $a, b \in R$.
15. Si R est un anneau intègre avec $\text{car } R = p$ où p est un nombre premier, alors l'application (de Frobenius) $F : R \rightarrow R, a \mapsto a^p$ est un monomorphisme.